Media e varianza di una variabile casuale uniforme discreta

Sia X una variabile casuale uniforme discreta che assume i valori $1, 2, \ldots, n$ con probabilità $f(x) = 1/n$.
Ricordando che la somma dei primi n interi è data da

$$\sum_{x=1}^{n} x = \frac{n(n+1)}{2}$$

e che la somma dei quadrati dei primi n interi è data da

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

calcoliamo la media e la varianza di X.
Per quanto riguarda la media:

$$E(X) = \mu = \sum_{x=1}^{n} x \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Per calcolare la varianza, troviamo prima $E(X^2)$.

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{n} x^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Possiamo ora calcolare $Var(X)$ impiegando la relazione $E(X^2) - (E(X))^2$:

$$Var(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$